第四章　习题

习题 1. 判定矩阵 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}3 & 2 & -1\\ -1 & 0 & 0\\ -1 & 3 & 0\end{bmatrix}$ 和 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0 & 2 & -1\\ -1 & 4 & -1\\ 1 & 3 & -5\end{bmatrix}$ 能否进行 ***LU*** 分解，为什么？如果能分解，试分解之。

习题 2. 对下列矩阵进行 ***LU*** 分解：

（1）$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 2\\ 1 & 2 & 2\end{bmatrix}$；(2)$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}12 & -3 & 3\\ -18 & 3 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$

习题 3. 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$ 的 ***LU*** 分解。

习题 4. 求对称正定矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}5 & 2 & -4\\ 2 & 1 & -2\\ -4 & -2 & 5\end{bmatrix}$$

的不带平方根的 *Cholesky* 分解。

习题 5. 对 $\boldsymbol{A}$ 进行 ***LU*** 分解

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -2\\ -3 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

习题 6. 对 $\boldsymbol{A}$ 进行 *Cholesky* 分解

$$\begin{bmatrix}25 & 15 & -5\\ 15 & 18 & 0\\ -5 & 0 & 11\end{bmatrix}$$

习题 7. 求下列矩阵的正交三角分解（*UR*）表达式：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

习题 8. 求矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & 5\\ 1 & -\frac{1}{2} & 2\\ -1 & \frac{1}{2} & -2\\ 1 & -\frac{3}{2} & 0\end{bmatrix}$$

的 QR 分解。

习题 9. 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}$ 的奇异值分解。

习题 10. 求 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{bmatrix}$ 的奇异值分解。

习题 11. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0&1\\1&2&0\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值分解。

习题 12. 已知

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\\0&2\\1&0\end{pmatrix}$$

求 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值分解表达式。

习题 13. 已知 $\boldsymbol{A}\in\mathcal{C}_r^{m\times n}$（秩为 $r>0$）的奇异值分解表达式为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\begin{pmatrix}\Delta&0\\0&0\end{pmatrix}\boldsymbol{V}^H$$

试求矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{A}\end{pmatrix}$ 的奇异值分解表达式。

习题 14. 已知矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&2&4\\\frac{1}{2}&0&2\\\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}$$

验证 $\boldsymbol{A}$ 是可对角化矩阵，并求 $\boldsymbol{A}$ 的谱分解表达式。

习题 15. 在对 PCA 是最佳的 d-维仿射变化拟合时，

$$\nabla_{\boldsymbol{\mu}}\sum_{i=1}^{n}\|\boldsymbol{x}_i-(\boldsymbol{\mu}_n+\boldsymbol{V}\boldsymbol{\beta}_i)\|_2^2=0\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{x}_i-(\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{V}\boldsymbol{\beta}_i))=0$$

$$\Leftrightarrow(\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{x}_i)-n\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{V}(\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\beta}_i)=0$$

有不失一般性假设 $\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\beta}_i=\boldsymbol{0}$。

证明，对任意的 $\boldsymbol{b}$，假设 $\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\beta}_i=\boldsymbol{b}$。最终得到 $\boldsymbol{x}_i$ 的拟合值 $\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{V}\boldsymbol{\beta}_i$ 是相等的。