第三章　习题

习题 1. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 n 个正数,证明:由 $\Omega(\boldsymbol{x}) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ 定义的函数 $\Omega : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是一个范数。

习题 2. 证明:当且仅当 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 线性相关且 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geq 0$ 时,才有

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|_2 = \|\boldsymbol{x}\|_2 + \|\boldsymbol{y}\|_2$$

习题 3. 设 $\|\cdot\|$ 是 $\mathbb{R}^m$ 上的一个向量范数,并且设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$。证明:若 $\mathrm{rank}(A) = n$,则 $\|\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{A}} := \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个向量范数。

习题 4. 证明:如果 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ 是按列分块的,那么

$$\|\boldsymbol{A}\|_F^2 = \|Va_1\|_2^2 + \|Va_2\|_2^2 + \cdots + \|\boldsymbol{a}_n\|_2^2$$

习题 5. 证明:$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\|_F \leq \|\boldsymbol{A}\|_F \|\boldsymbol{B}\|_F$ 和 $\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\|_F \leq \|\boldsymbol{A}\|_F \|\boldsymbol{B}\|_2$

习题 6. 设 $\|\cdot\|$ 是由向量范数 $\|\cdot\|$ 诱导出的矩阵范数。证明:若 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 非奇异,则

$$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|^{-1} = \min_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|$$

习题 7. 证明:在 $\mathbb{R}^n$ 上,当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵时,函数 $f(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\frac{1}{2}}$ 是一个向量范数。

习题 8. 设 $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$,试用正交化过程把这组向量规范正交化。

习题 9. 由 $\|\boldsymbol{x}\|_2^2 = \langle x, x\rangle$ 和 $\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{I}$,证明:

$$\|(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{\mu}_n) - \boldsymbol{V}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{\mu}_n)\|_2^2 = (\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{\mu}_n)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{\mu}_n) - (\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{\mu}_n)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{\mu}_n)$$

习题 10. 令 $\mathbb{B} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ 是子空间 $\mathbb{W}$ 的正交基,且 $\boldsymbol{u}$ 是子空间 $\mathbb{W}$ 内的向量,证明:若 $\boldsymbol{u} = a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2, + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n$,则

$$\|\boldsymbol{u}\|^2 = |\boldsymbol{a}_1|^2 + |\boldsymbol{a}_2|^2 + \cdots + |\boldsymbol{a}_n|^2$$

习题 11. 证明,任意一组由 $\mathbb{R}^3$ 中的 4 个或者更多的向量的集合不可能组成 $|\mathbb{R}^3$ 的正交基。

习题 12. 考虑两个子空间 $\mathbb{U}_1$ 和 $\mathbb{U}_2$,其中 $\mathbb{U}_1$ 是齐次方程组 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解空间,$\mathbb{U}_2$ 是齐次方程组 $\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解空间。其中

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & -5 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(1) 求子空间 $\mathbb{U}_1, \mathbb{U}_2$ 的维数。

(2) 求子空间 $\mathbb{U}_1, \mathbb{U}_2$ 的基。

(3) 求子空间 $\mathbb{U}_1 \cap \mathbb{U}_2$ 的基。

习题 13. 考虑两个子空间 $\mathbb{U}_1$ 和 $\mathbb{U}_2$，其中 $\mathbb{U}_1$ 是 $\boldsymbol{A}_1$ 的列张成的空间，$\mathbb{U}_2\boldsymbol{A}_2$ 的的列张成的空间。其中

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & -5 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(1) 求子空间 $\mathbb{U}_1, \mathbb{U}_2$ 的维数。

(2) 求子空间 $\mathbb{U}_1, \mathbb{U}_2$ 的基。

(3) 求子空间 $\mathbb{U}_1 \cap \mathbb{U}_2$ 的基。

习题 14. $\mathbb{R}^5$ 的欧氏空间。子空间 $U \subseteq \mathbb{R}^5$ 和 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5$ 如下：

$$U = \operatorname{span}\left[\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 5 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}\right], \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ -9 \\ -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(1) 确定 $\boldsymbol{x}$ 在子空间 $\mathbb{U}$ 上的正交投影 $\pi_U(\boldsymbol{x})$

(2) 计算 $\boldsymbol{x}$ 到子空间 $\mathbb{U}$ 的距离，$d(\boldsymbol{x}, \mathbb{U})$