第五章　习题

习题 1. 求解方程组 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \\ & 1 & 2 & 1 \\ & & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

习题 2. 使用 LU 分解方程组 $Ax = b$，其中 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

习题 3. 设 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 用正则化方法求对应的 LS 问题的解。

习题 4. 设 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 求对应的 LS 问题的全部解。

习题 5. 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 且存在 $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ 使得对每一个 $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{b}$ 均极小化 $\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|_2$. 证明 $\boldsymbol{AXA} = \boldsymbol{A}$ 和 $(\boldsymbol{AX})^T = \boldsymbol{AX}$。

习题 6. 利用等式

$$\|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{w}) - \boldsymbol{b}\|_2^2 = \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|_2^2 + 2\alpha\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}) + \alpha^2\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{w}\|_2^2$$

证明：如果 $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}_{LS}$, 那么 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b}$。

习题 7. 给定点集 $\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_m \in \mathbb{R}^n$ 构成的 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{P} = [\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_m]$。考虑问题

$$\min_{\boldsymbol{X}} F(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{m} \|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{p}_i\|_2^2 + \frac{\lambda}{2}\sum_{1\le i,j\le m} \|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j\|_2^2$$

其中 $\lambda \ge 0$ 为参数，变量是一个 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_m]$，其中 $\boldsymbol{x}_i \in \mathbb{R}^n$ 是 $\boldsymbol{X}$ 的第 i 列，$i = 1\square\cdots, m$. 上述问题尝试聚类点集 $\boldsymbol{p}_i$，第一项鼓励聚类中心 $\boldsymbol{x}_i$ 靠近对应的点 $\boldsymbol{p}_i$，第二项鼓励 $\boldsymbol{x}_i$ 们之间彼此靠近，当 λ 增大的时候，对应更高的组群影响。

1. 请说明这个问题属于最小二乘类问题。不需要明确阐述这个问题的形式。

2. 证明 $\frac{1}{2}\sum_{1\le i,j\le m} \|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j\|_2^2 = \mathrm{Tr}(\boldsymbol{X}\boldsymbol{H}\boldsymbol{X}^T)$, 其中 $\boldsymbol{H} = m\boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^T$ 是一个 $m \times m$ 矩阵，$\boldsymbol{I}_m$ 是 $m \times m$ 单位矩阵，$\boldsymbol{1}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的单位向量。

3. 证明 $\boldsymbol{H}$ 是半正定的。

4. 证明函数 F 在矩阵 $\boldsymbol{X}$ 处的梯度是一个 $n \times m$ 矩阵，为：

$$\nabla F(\boldsymbol{X}) = 2(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{P} + \lambda\boldsymbol{X}\boldsymbol{H})$$

提示：对于第二项，找到函数的一阶展式，$\triangle \to \mathrm{Tr}((\boldsymbol{X} + \triangle)\boldsymbol{H}(\boldsymbol{X} + \triangle)^T)$, 其中 $\triangle\mathbb{R}^{n,m}$。

5. 依据最小二乘问题的最优条件为目标函数的梯度为零。证明最优点集的形式为:

$$\boldsymbol{x}_i = \frac{1}{m\lambda+1}\boldsymbol{p}_i + \frac{m\lambda}{m\lambda+1}\hat{\boldsymbol{p}}, i = 1, \cdots, m,$$

其中 $\hat{\boldsymbol{p}} = \square(1/m)(\boldsymbol{p}_1 + \cdots + \boldsymbol{p}_m)$ 是给定点集的中心。

6. 阐述你的结果，你认为这是聚类点集的一个好的模型么？

习题 8. 判断 $[1, 3, 4]$ 的转置是否在 $\boldsymbol{A}$ 的零空间中？

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -3 \\ 6 & -2 & 0 \\ -8 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

习题 9. 求矩阵

$$\begin{bmatrix} 5 & 21 & 19 \\ 13 & 23 & 2 \\ 8 & 14 & 1 \end{bmatrix}$$

的行空间和列空间。

习题 10. 简答：阐述非负矩阵分解和主成分分析的相同点和不同点。

习题 11. 估计矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ 特征值范围。

习题 12. 利用幂法求解矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ 模最大的特征值与对应的特征向量。(特征值答案保留两位有效数字，特征向量答案保留三位有效数字)

习题 13. 利用反幂法求解矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ 模最小的特征值与对应的特征向量。(特征值答案保留两位有效数字，特征向量答案保留三位有效数字)

习题 14. 利用原点位移法求解矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ 全部特征值与对应的特征向量。(特征值答案保留两位有效数字，特征向量答案保留三位有效数字)