6.1 点估计的概念与无偏性

3. 设 $\widehat{\theta}$ 是参数 θ 的无偏估计，且有 $\operatorname{Var}(\widehat{\theta})>0$，试证 $(\widehat{\theta})^2$ 不是 θ^2 的无偏估计。

证明：

由题意可知 $E\widehat{\theta}=\theta$，$\operatorname{Var}\widehat{\theta}=E\widehat{\theta}^2-(E\widehat{\theta})^2>0$，所以 $E\widehat{\theta}^2>(E\widehat{\theta})^2=\theta^2$，所以 $\widehat{\theta}^2$ 不是 θ^2 的无偏估计。 □

4. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2),x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是来自该总体的一个样本。试确定常数 c 使 $c\sum\limits_{i=1}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)^2$ 为 σ^2 的无偏估计。

解：

$$
\begin{aligned}
Ec\sum_{i=1}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)^2&=Ec\sum_{i=1}^{n-1}(x_{i+1}^2-2x_ix_{i+1}+x_i^2)\\
&=c\sum_{i=1}^{n-1}Ex_{i+1}^2-2c\sum_{i=1}^{n-1}Ex_ix_{i+1}+c\sum_{i=n}^{n-1}Ex_i^2
\end{aligned}
$$

因为总体 $X\sim N(\mu,\sigma)$，所以 $\forall i=1,2,\cdots,n$ ，$Ex_i=\mu,\operatorname{Var}x_i=Ex_i^2-(Ex_i)^2=\sigma^2$，从而 $Ex_i^2=\sigma^2+\mu^2$。由于 x_i 与 x_{i+1} 独立，所以 $Ex_ix_{i+1}=Ex_i\cdot Ex_{i+1}=\mu^2$。所以

$$
\begin{aligned}
\text{上式}&=c\sum_{i=1}^{n-1}(\sigma^2+\mu^2)-2c\sum_{i=1}^{n-1}\mu^2+c\sum_{i=1}^{n-1}(\sigma^2+\mu^2)\\
&=2c(n-1)(\sigma^2+\mu^2)-2c(n-1)\mu^2\\
&=2c(n-1)\sigma^2
\end{aligned}
$$

所以当 $c=\dfrac{1}{2(n-1)}$ 时，$c\sum\limits_{i=1}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)^2$ 为 σ^2 的无偏估计。 □

5. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是来自下列总体的简单样本，

$$
p(x,\theta)=\begin{cases}1, & \theta-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\theta+\frac{1}{2}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\quad -\infty<\theta<\infty
$$

证明样本均值 $\bar{x}$ 及 $\frac{1}{2}(x_{(1)}+x_{(n)})$ 都是 θ 的无偏估计，问何者更有效?

证明：

$E\bar{x}=\theta$，$\operatorname{Var}\bar{x}=\frac{1}{n}\times\frac{1}{12}=\frac{1}{12n}$。

而 $E\frac{1}{2}(x_{(1)}+x_{(n)})$ 为样本中最小值和最大值的平均，虽然计算不出，但理论上也应该是 θ。但是似乎不像样本均值一样覆盖了样本全部的信息，所以应该是 $\operatorname{Var}\bar{x}\leqslant\operatorname{Var}\frac{1}{2}(x_{(1)}+x_{(n)})$，即 $\bar{x}$ 更有效。 □

9. 设有 k 台一起，已知用第 i 台仪器测量的标准差为 $\sigma_i(i=1,2,\cdots,k)$。用这些仪器独立地对某一物理量 θ 各观察一次，分别得到 $x_1,x_2,\cdots,x_k$，设仪器都没有系统偏差。问 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 应取何值，方能使 $\widehat{\theta}=\sum\limits_{i=1}^{k}a_ix_i$ 成为 θ 的无偏估计，且方差达到最小?

解：

$$E\widehat{\theta}=E\sum_{i=1}^{k}a_ix_i=\sum_{i=1}^{k}a_iEx_i=\theta\sum_{i=1}^{k}a_i=\theta\Longrightarrow\sum_{i=1}^{k}a_i=1$$

$$\operatorname{Var}\widehat{\theta}=\operatorname{Var}\sum_{i=1}^{k}a_ix_i=\sum_{i=1}^{k}a_i^2\operatorname{Var}x_i=\sum_{i=1}^{k}a_i^2\sigma_i^2$$

所以原问题可以转化为

$$\mathop{\arg\min}_{a_i}\quad\sum_{i=1}^{k}a_i^2\sigma_i^2\quad,\quad\text{s.t.}\quad\sum_{i=1}^{k}a_i=1$$

对此可以使用拉格朗日乘数法。令

$$f(a_1,\cdots,a_n,\lambda)=\sum_{i=1}^{k}a_i^2\sigma_i^2+\lambda\left(\sum_{i=1}^{k}a_i-1\right)$$

则

$$\begin{cases}\forall i=1,2,\cdots,k,\quad f'_{a_i}=2a_i\sigma_i^2+\lambda=0\\ f'_\lambda=\sum_{i=1}^{k}a_i-1=0\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}\forall i=1,2,\cdots,k,\quad a_i=\dfrac{\frac{1}{2\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2\sigma_i^2}}\\ \lambda=-\dfrac{1}{\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2\sigma_i^2}}\end{cases}$$

所以 $\forall i=1,2,\cdots,k,\quad a_i=\dfrac{\frac{1}{2\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2\sigma_i^2}}$，方能使 $\widehat{\theta}=\sum\limits_{i=1}^{k}a_ix_i$ 成为 θ 的无偏估计，且方差达到最小。 □

11. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为来自总体 X 的样本，为了得到标准差 σ 的估计量，考虑统计量:

$$y_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i-\bar{x}|,\quad \bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,\quad n\geqslant2$$

$$y_2=\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i-x_j|,\quad n\geqslant2$$

求常数 C_1 与 C_2，使得 C_1y_1 与 C_2y_2 都是 σ 的无偏估计。

解：

由于 $\forall i,j=1,2,\cdots,n(i\neq j)$, $x_i\sim N(\mu,\sigma^2),x_j\sim N(\mu,\sigma^2),\bar{x}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$ 且它们应该相互独立。所以

$$x_i-\bar{x}\sim N(0,\sigma^2+\frac{\sigma^2}{n}),\quad x_i-x_j\sim N(0,2\sigma^2)$$

因为 $Y\sim N(0,\sigma^2)$ 时 $E|Y|=\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}$，所以

$$E|x_i-\bar{x}|=\sqrt{\sigma^2+\frac{\sigma^2}{n}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}=\sigma\sqrt{1+\frac{1}{n}}\sqrt{\frac{2}{\pi}},\quad E|x_i-x_j|=\sqrt{2}\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}=\frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}$$

所以

$$EC_1y_1=C_1\frac{1}{n}\times n\cdot\sigma\sqrt{1+\frac{1}{n}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}=\sigma\Longrightarrow C_1=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}}=\sqrt{\frac{n\pi}{2n+2}}$$

$$EC_2y_2=C_2\frac{1}{n(n-1)}(n^2-n)\cdot\frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}=\sigma\Longrightarrow C_2=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

所以

$$C_1=\sqrt{\frac{n\pi}{2n+2}},\quad C_2=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

□

6.2 矩估计及相合性

3. 设总体分布列如下，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是样本，试求未知参数的矩估计：

(1) $P(X=k)=\frac{1}{N},k=0,1,2,\cdots,N-1$，$N$（正整数）是未知参数；

解：

$$EX=\sum_{k=0}^{N-1}k\cdot\frac{1}{N}=\frac{1}{N}\cdot\frac{N(N-1)}{2}=\frac{N-1}{2}$$

所以 $N=2EX+1$，所以 N 的矩估计为

$$\widehat{N}=2\bar{x}+1$$

□

(2) $P(X=k)=(k-1)\theta^2(1-\theta)^{k-2},\quad k=2,3,\cdots,\quad 0<\theta<1$。

解：

$$EX=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)\theta^2(1-\theta)^{k-2}=\frac{2}{\theta}$$，所以 $\theta=\frac{2}{EX}$，所以 θ 的矩估计为 $\widehat{\theta}=\frac{2}{\bar{x}}$。

□

4. 设总体密度函数如下，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是样本，试求未知参数的矩估计：

(1) $p(x;\theta) = \frac{2}{\theta^2}(\theta - x), \quad 0 < x < \theta, \quad \theta > 0;$

解：

$$EX = \int_0^\theta x \frac{2}{\theta^2}(\theta - x)\mathrm{d}x = \frac{\theta}{3}\text{ ，所以 } \theta = 3EX\text{，所以 } \theta \text{ 的矩估计是 } \widehat{\theta} = 3\bar{x}\text{。}$$ □

(2) $p(x;\theta) = (\theta+1)x^\theta, \quad 0 < x < 1, \quad \theta > 0;$

解：

$$EX = \int_0^1 x(\theta+1)x^\theta \mathrm{d}x = \frac{\theta+1}{\theta+2}\text{，所以 } \theta \text{ 的矩估计是 } \widehat{\theta} = \frac{1}{1-\bar{x}} - 2\text{。}$$ □

(3) $p(x;\theta) = \sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1}, \quad 0 < x < 1, \quad ,\theta > 0;$

解：

$$EX = \int_0^1 x\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}\text{ ，所以 } \theta \text{ 的矩估计是 } \widehat{\theta} = \left(\frac{\bar{x}}{1-\bar{x}}\right)^2\text{。}$$ □

(4) $p(x;\theta,\mu) = \dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}, \quad x > \mu, \quad \theta > 0$。

解：

$$EX = \int_\mu^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\theta}e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}\mathrm{d}x = \theta + \mu$$
$$EX^2 = \int_\mu^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\theta}e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}\mathrm{d}x = 2\theta^2 + 2\mu\theta + \mu^2$$
$$\operatorname{Var} X = EX^2 - (EX)^2 = 2\theta^2 + 2\mu\theta + \mu^2 - (\theta+\mu)^2 = \theta^2$$

所以 θ 和 μ 的矩估计是

$$\widehat{\theta} = s, \quad \widehat{\mu} = \bar{x} - s$$

□

5. 设总体为 $N(\mu, 1)$，现对该总体观测 n 次，发现有 k 次观测值为正，使用频率替换方法求 μ 的估计。

解：

设总体为 X，则根据频率替换方法，$P(X>0) = \dfrac{k}{n}$。设标准正态分布的累积分布函数为 $\Phi(x)$，则

$$\frac{k}{n} = P(X>0) = P\left(\frac{x-\mu}{1} > \frac{0-\mu}{1}\right) = 1 - P\left(\frac{x-\mu}{1} \leqslant -\mu\right) = 1 - \Phi(-\mu)$$

所以 μ 的估计为

$$\widehat{\mu} = -\Phi^{-1}(1 - \frac{k}{n})$$

□

7. 设总体 X 服从二项分布 $b(m,p)$，其中 m,p 为未知参数，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为 X 的一个样本，求 m 与 p 的矩估计。

解：

因为 $EX = mp, \operatorname{Var} X = mp(1-p)$，所以 $p = 1 - \dfrac{\operatorname{Var} X}{EX}$，$m = \dfrac{EX}{p} = \dfrac{(EX)^2}{EX - \operatorname{Var} X}$，所以 m 与 p 的矩估计为

$$m = 1 - \frac{s}{\bar{x}}, \qquad p = \frac{\bar{x}^2}{\bar{x} - s}$$

□