练习题 4.1

2. 总共 m 个白球和 m 个黑球分别放在 A,B 两个坛子中，每个坛子有 m 个球，每次从这两个坛子中各随机地取一个球并把它们交换后放回。以 X_n 表示经过 n 次后 A 坛中黑球个数。求 X_n 的平稳分布。

解：

当 $X=i$ 时，此时的球的数量为

	A	B
黑	i	$m-i$
白	$m-i$	i

则下一时刻的情况为

	A 黑 B 黑	A 白 B 白	A 黑 B 白	A 白 B 黑
概率	$\frac{i(m-i)}{m^2}$	$\frac{i(m-i)}{m^2}$	$\frac{i^2}{m^2}$	$\frac{(m-i)^2}{m^2}$
X 的变化	0	0	-1	$+1$

所以一步转移概率为 $p_{i,i-1}=\frac{i^2}{m^2}, p_{i,i+1}=\frac{(m-i)^2}{m^2}, p_{ii}=\frac{2i(m-i)}{m^2}$。

根据细致平衡条件，$\pi_i p_{i,i-1}=\pi_{i-1}p_{i-1,i}$，可得 $\pi_i\frac{i^2}{m^2}=\frac{(m-i+1)^2}{m^2}\pi_{i-1}$，所以 $\frac{\pi_i}{\pi_{i-1}}=\frac{(m-i+1)^2}{i^2}$。所以

$$\pi_j=\pi_0\prod_{i=0}^{j}\frac{\pi_i}{\pi_{i-1}}=\pi_0\prod_{i=0}^{j}\frac{(m-i+1)^2}{i^2}=\pi_0\left(\mathrm{C}_m^j\right)^2$$

根据

$$\sum_{j=0}^{m}\left(\mathrm{C}_m^j\right)^2\pi_0=1$$

可得 $\pi_0=\frac{1}{\sum_{j=0}^m\left(\mathrm{C}_m^j\right)^2}$，所以 $\pi_j=\frac{\left(\mathrm{C}_m^j\right)^2}{\sum_{j=0}^m\left(\mathrm{C}_m^j\right)^2}$。所以 X_n 的平稳分布为

$$\left\{\frac{\left(\mathrm{C}_m^j\right)^2}{\sum_{j=0}^m\left(\mathrm{C}_m^j\right)^2}\ \middle|\ j=0,1,\cdots,m\right\}$$

□

3. 证明当 $q>p$ 时带一个反射壁的简单随机游动是可逆的，并由此求 m_{00}。

证明：

题目中只交代了带一个反射壁，没说反射壁在左侧还是右侧，根据后面要求的 m_{00} 来看，这里就认为在 0 的左侧吧。首先写出转移概率 $p_{01}=1, \forall i\in\mathbb{N}^+, p_{i,i+1}=p, p_{i,i-1}=p$。根据细致平衡条件，$\pi_i p_{i,i+1}=\pi_{i+1}p_{i+1,i}$，所以

$$\pi_1 q=\pi_0\cdot 1,\qquad \forall i\in\mathbb{N}^+,\pi_i p=\pi_{i+1}q$$

所以

$$\pi_0 = \pi_1 q, \qquad \forall i \in \mathbb{N}^+, \pi_{i+1} = \frac{p}{q}\pi_i$$

所以 $\forall j \in \mathbb{N}^+, \pi_j = \pi_1 \prod_{i=1}^{j-1} \frac{p}{q}$，再根据 $\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$ 可得

$$1 = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{p}{q}\right)^{j-1} + q \right) \pi_1 = \left(\frac{1}{1-\frac{p}{q}} + q \right) \pi_1 = \frac{q^2 - pq + q}{q-p} \pi_1$$

所以 $\pi_1 = \dfrac{q-p}{q^2 - qp + q}$，$\pi_0 = \pi_1 q = \dfrac{q-p}{q-p+1}$。所以 $m_{00} = \dfrac{1}{\pi_0} = \dfrac{q-p+1}{q-p}$。 □

4. 若 X 的转移概率矩阵为 $(p_{i,j})$，$\pi = (\pi_i, i \in S)$ 是 X 的可逆分布。证明对任意 $n \geqslant 1$，$\pi_i p_{ij}^{(n)} = \pi_j p_{ji}^{(n)}$。

证明：

对 n 进行数学归纳法，当 $n = 1$ 时，由于 pi 是 X 的可逆分布，根据可逆分布的定义可知成立。

当 $n > 1$ 时，假设 $n-1$ 时结论成立，即 $\pi_i p_{ij}^{(n-1)} = \pi_j p_{ji}^{(n-1)}$，则对于 n，

$$\begin{aligned} \pi_i p_{ij}^{(n)} &= \pi_i \sum_{k \in S} p_{ik}^{(n-1)} p_{kj} = \sum_{k \in S} \pi_i p_{ik}^{(n-1)} p_{kj} = \sum_{k \in S} \pi_k p_{ki}^{(n-1)} p_{kj} \\ &= \sum_{k \in S} \pi_k p_{kj} p_{ki}^{(n-1)} = \sum_{k \in S} \pi_j p_{jk} p_{ki}^{(n-1)} = \pi_j p_{ji}^{(n)} \end{aligned}$$

所以对任意 $n \geqslant 1$，$\pi_i p_{ij}^{(n)} = \pi_j p_{ji}^{(n)}$。 □

5. 设不可约马氏链 X 的转移概率矩阵 $\mathbf{P}$ 是双随机的，即每行元素之和为 1，每列元素之和也为 1。证明

(1) X 是正常返的当且仅当 X 是有限状态马氏链；

证明：

“$\Longleftarrow$”：由于 P 是双随机的，且状态有限，所以离散均匀分布为 X 的平稳分布，又因为 X 不可约，所以 X 是正常返的。

“$\Longrightarrow$”：由于 X 是正常返的，所以 X 存在唯一的平稳分布。由于 P 是双随机的，所以 $(1, 1, 1, \cdots)$ 是一个不变测度。又因为平稳分布是不变测度的倍数且唯一，即 $\exists a > 0, \ \text{s.t.}\ (a, a, a, \cdots)$ 是平稳分布，所以 $a + a + a + \cdots = 1$，所以 X 一定是有限状态马氏链。 □

(2) X 是可逆的当且仅当 $\mathbf{P}$ 是有限阶的对称矩阵。

证明：

“$\Longleftarrow$”：由于 P 是有限阶的对称矩阵，设为 n 阶，即 $P=(p_{ij})_{n\times n}$，则 $\forall i,j=1,2,\cdots,n$，$p_{ij}=p_{ji}$，所以当 $\pi=(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\cdots,\frac{1}{n})$ 时，$\pi_i p_{ij}=\pi_j p_{ji}$，即 π 满足细致平衡条件，从而 π 是 X 的可逆分布，所以 X 是可逆的。

“$\Longrightarrow$”：因为 X 是可逆的且不可约，所以 X 正常返，根据上一小题的结论，X 状态有限（设为 n 个状态），且平稳分布为 $\pi=(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\cdots,\frac{1}{n})$。根据细致平衡条件有 $\forall i,j=1,2,\cdots,\pi_i p_{ij}=\pi_j p_{ji}$，又因为 $\pi_i=\pi_j$，所以 $p_{ij}=p_{ji}$，即 P 是有限阶的对称矩阵。 □

6. 若对任意 $i,j\in S$，$p_{ij}>0$，那么以 $(p_{i,j})_{i,j\in S}$ 为转移概率矩阵的正常返马氏链是可逆的当且仅当对任意的 $i,j,k\in S$，$p_{ij}p_{jk}p_{ki}=p_{ik}p_{kj}p_{ji}$。

证明：

“$\Longrightarrow$”：根据定理 4.1.4，从任意一状态触发回到改状态的路径与它的反向路径有相同的概率，所以 $p_{ij}p_{jk}p_{ki}=p_{ik}p_{kj}p_{ji}$。

“$\Longleftarrow$”： □

8. 给定整数 $N>1$。设 $X=\{X_n : n=0,1,\cdots,N\}$ 是转移概率矩阵为 $P=(p_{ij})_{i,j\in S}$ 的时齐马氏链。对任意 $n=0,1,\cdots,N$，定义 $Y_n=X_{N-n}$。

(1) 证明：$Y=\{Y_n : n=0,1,\cdots,N\}$ 是马氏链，但未必时齐。

证明：

$$
\begin{aligned}
&\forall n=0,1,\cdots,N-1,\quad i_0,i_1,\cdots i_N\in S,\\
&P(Y_{n+1}=i_{n+1}|Y_n=i_n,\cdots,Y_0=0)\\
=&P(X_{N-n-1}=i_{n+1}|X_{N-n}=n,\cdots,X_N=0)\\
=&\frac{P(X_{N-n-1}=i_{n+1},X_{N-n}=i_n,\cdots,X_N=0)}{P(X_{N-n}=i_n,\cdots,X_N=0)}\\
=&\frac{P(X_{N-n-1}=i_{n+1})P(X_{N-n}=i_n|X_{N-n-1}=i_{n+1})\cdots P(X_N=i_0|X_{N-1}=i_1)}{P(X_{N-n}=i_{N-n})P(X_{N-n+1}=i_{n-1}|X_{N-n}=i_n)\cdots P(X_N=i_0|X_{N-1}=i_1)}\\
=&\frac{P(X_{N-n-1}=i_{n+1})P(X_{N-n}=i_n|X_{N-n-1}=i_{n+1})}{P(X_{N-n}=i_n)}\\
=&P(X_{N-n-1}=i_{n+1}|X_{N-n}=i_n)\\
=&P(Y_{n+1}=i_{n+1}|Y_n=i_n)
\end{aligned}
$$

所以 Y 是马氏链，但未必时齐。 □

(2) 证明：当 X 的初始分布是 X 的平稳分布时，Y 是时齐马氏链。并写出 Y 的一步转移概率。

证明：

设 X 的平稳分布为 $\pi=\{\pi_i\,;\,i\in S\}$，则

$$p'_{ij}=P(Y_{n+1}=j|Y_n=i)=\frac{P(X_{N-n-1}=j)P(X_{N-n}=i|X_{N-n-1}=j)}{P(X_{N-n}=i)}=\frac{\pi_j p_{ji}}{\pi_i}$$

这就是 Y 的一步转移概率，并且与 n 无关，所以 Y 是时齐马氏链。 □

(3) 证明：当 X 的初始分布是 X 的可逆分布时，两个过程 X 与 Y 同分布。

证明：

设 X 的初始分布是 μ，也是 X 的可逆分布。由于 X 的可逆分布必定是 X 的平稳分布，所以由上一小题，$p'_{ij}=\dfrac{\mu_j p_{ji}}{\mu_i}=\dfrac{\mu_i p_{ij}}{\mu_i}=p_{ij}$，所以 Y 的一步转移概率与 X 相同，所以 X 与 Y 同分布。 □