练习题 3.3

1. 设 X 的状态空间为 $\{1,2,3\}$，转移概率矩阵为 $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$，对任意 $n \geqslant 1$，求 $f_{1,2}^{(n)}$。

解：

$$\begin{cases} F_{12}(u) = p_{12}u + p_{11}uF_{12}(u) + p_{13}uF_{32}(u) & ① \\ F_{22}(u) = p_{22}u + p_{21}uF_{12}(u) + p_{23}uF_{32}(u) & ② \\ F_{32}(u) = p_{32}u + p_{31}uF_{12}(u) + p_{33}uF_{32}(u) & ③ \end{cases}$$

由①和③可得

$$\begin{cases} F_{12}(u) = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}uF_{32}(u) \\ F_{32}(u) = \frac{1}{2}u + \frac{2}{3}uF_{32}(u) \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} F_{32}(u) = \frac{\frac{1}{2}u}{1-\frac{2}{3}u} \\ F_{12}(u) = \frac{1}{2}u + \frac{\frac{1}{4}u^2}{1-\frac{2}{3}u} \end{cases}$$

所以

$$F_{12}(u) = \frac{1}{2}u + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4}u^2 \left(\frac{2}{3}u\right)^{n-1} = \frac{1}{2}u + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} u^{n+1} = \frac{1}{2}u + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} u^n$$

综上，$f_{12}^{(1)} = \dfrac{1}{2}u, \quad f_{12}^{(n)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-2} (n \geqslant 2)$。 □

2. 一个盗窃犯长期在 $A=1, B=2, C=3$ 三地流传作案，治安部门调查后发现他每年作案次数服从强度为 3 的泊松分布，而连续两次作案的地点变化服从转移概率矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，并且作案次数与作案地点无关。已知此人刚刚在 A 地作案，试估计一年内他在 A 地再作案的概率。

解：

由题意可知，作案地点的变化为时齐马氏链，从而所求的概率为 $E_{k\sim \mathrm{Poi}(3)} f_{11}^{(k)}$。

$$\begin{cases} F_{11}(u) = uF_{31}(u) & ① \\ F_{21}(u) = \frac{1}{2}uF_{11}(u) + \frac{1}{2}u & ② \\ F_{31}(u) = uF_{21}(u) & ③ \end{cases}$$

由①③得 $F_{11}(u) = u^2F_{21}(u)$，代入②可得 $F_{21}(u) = \frac{1}{2}u^3F_{21}(u) + \frac{1}{2}u$，解得 $F_{21}(u) = \dfrac{\frac{1}{2}u}{1-\frac{1}{2}u^3}$，所以

$$F_{11}(u) = \frac{\frac{1}{2}u^3}{1-\frac{1}{2}u^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}u^3 \left(\frac{1}{2}u^3\right)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n u^{3n}$$

令 $k=3n$，则 $f_{11}^{(k)}=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k}{3}}, & k=3n\\ 0, & k\neq 3n\end{cases}, n\in\mathbb{Z}^+, k\in\mathbb{Z}^+$，所以

$$E_{k\sim\text{Poi}(3)}f_{11}^{(k)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot\frac{3^{3n}}{(3n)!}e^{-3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(3\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)^{3n}}{(3n)!}e^{-3}=e^{3\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}e^{-3}=e^{\frac{3}{\sqrt[3]{2}}-3}$$

□

3. 设 X 的状态空间为 $\{1,2,3\}$，转移概率矩阵为 $\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$。求 $f_{3,2}$ 和 $m_{3,2}$。

解：

$$\begin{cases}f_{32}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}f_{32}, & ①\\ f_{12}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}f_{12}, & ②\\ f_{22}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}f_{12}, & ③\end{cases}\qquad\begin{cases}m_{32}=f_{32}+\frac{2}{3}m_{32}, & ④\\ m_{12}=f_{12}+\frac{1}{2}m_{22}, & ⑤\\ m_{22}=f_{22}+\frac{2}{3}m_{12}, & ⑥\end{cases}$$

由①可得 $f_{32}=1$，代入④可得 $m_{32}=3$。 □

4. 若一篇文稿有 n 个错误, 每次校阅至少能发现一个, 但留下来的错误数在 0 到 $n-1$ 之间等可能存在. 设原稿共有 a 个错误, 问为了改正全部错误平均需要校阅几次?

解：

设随机过程 X 表示在某个时刻留下来的错误数，则 X 是时齐马氏链，状态空间为 $\{1,2,\cdots,n-1\}$。X 的转移概率矩阵为

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & 0\end{pmatrix}_{n\times n}$$

所以

$$\begin{cases}f_{10}=1\\ f_{20}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}f_{10}=1\\ f_{30}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}f_{10}+\frac{1}{3}f_{20}=1\\ \cdots\\ f_{n0}=\frac{1}{n}+\sum_{i=1}^{n}f_{i0}=1\end{cases}\qquad\begin{cases}m_{10}=f_{10}\\ m_{20}=f_{20}+\frac{1}{2}m_{10}=1+\frac{1}{2}\times 1=\frac{3}{2}\\ m_{30}=f_{30}+\frac{1}{3}m_{10}+\frac{1}{3}m_{20}=1+\frac{1}{3}\times 1+\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}=\frac{11}{6}\\ \cdots\\ m_{n0}=f_{n0}+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{n}m_{i0}\end{cases}$$

根据递推公式算出 m_{n0}（不会算通项公式了），将 a 代入，则可知为了改正全部错误平均需要校阅 m_{a0} 次。 □

6. (Ehrenfest 模型) 设一个坛子内装有红白两色共 N 个球, 每次随机地从坛子中抽出一个球, 把它换成另一种颜色后放回。以 X_n 表示经 n 次抽放后坛中的红球数, 那么 $X=\{X_n\ ;\ n\geqslant 0\}$ 为时齐马氏链。若开始时坛内只有一个红球, 问平均要抽放多少次才能使坛内全是白球?

解:

可以观察到 X 类似带反射壁的随机游动，但向中间收敛的概率更大，转移概率矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{N} & 0 & \frac{N-1}{N} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{N} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{N} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

开始时坛内只有一个红球，那么 $X_0=1$，使坛内全是白球即 $X_?=0$，所以所求的平均抽放次数为 m_{10}。

由于这是元素有限的本质类，从而一定是常返类，所以 $\forall i,j\in\{1,2,\cdots N\},f_{ij}=1$，所以可以直接列出 m_{ij} 的方程组。

$$\begin{cases} m_{00} & =1+m_{10} \\ m_{10} & =1+\frac{N-1}{N}m_{20}+\frac{1}{N}m_{00} \\ m_{20} & =1+\frac{2}{N}m_{10}+\frac{N-2}{N}m_{30} \\ \cdots & \\ m_{n-1,0} & =1+\frac{N-1}{N}m_{n-2,0}+\frac{1}{N}m_{n0} \\ m_{n0} & =1+m_{n-1,0} \end{cases}$$

写成矩阵的形式为

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\frac{1}{N} & 1 & -\frac{N-1}{N} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{N} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -\frac{1}{N} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{00} \\ m_{10} \\ m_{20} \\ \vdots \\ m_{n-1,0} \\ m_{n0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

解得 $m_{10}=\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{N} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}\right)(1,0)$ 即为使坛内全是白球的平均抽放次数。 □

补 ("赌徒输光模型")考虑 $\{0,1,\cdots,N\}(N\geqslant 2)$ 上的 (q,p)-简单随机游动($0<p,q<1,p+q=1$),其中两个端点是"完全吸收壁"(即 $p_{00}=p_{NN}=1$。对 $i\in\{1,\cdots,N-1\}$,计算 f_{i0}(即初始状态为 i 时的"输光"概率)。

解:由题意可知转移概率矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ q & 0 & p & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)}$$

则可以列出关于 f_{i0} 的方程组

$$\begin{cases} f_{00}=1 \\ f_{10}=qf_{00}+pf_{20} \\ f_{20}=qf_{10}+pf_{30} \\ \cdots \\ f_{n-2,0}=qf_{n-3,0}+pf_{n-1,0} \\ f_{n-1,0}=qf_{n-2,0}+pf_{n0} \\ f_{n_0}=f_{n_0} & \text{(这一条方程可以去除,因为 } f_{n0}=0\text{)} \end{cases}$$

写成矩阵的形式为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ q & -1 & p & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & q & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & p \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & q & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{00} \\ f_{10} \\ f_{20} \\ \vdots \\ f_{n-2,0} \\ f_{n-1,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

解得 $\begin{bmatrix} f_{00} & f_{10} & f_{20} & \cdots & f_{n-1,0} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \oplus [f_{n0}]$ 即为所求的 f_{i0}。(实在算不出来了) $\square$