7.3 图的连通性

1. 设简单无向图 $G=(V,E)$，若 $\delta(G)\geqslant k(k\geqslant 1)$。请证明：$G$ 有长度为 k 的基本通路。

证明：

使用数学归纳法，

由于 $\delta(G)\geqslant k\geqslant 1$，所以 G 中存在边，从而 G 不是零图，因此必定有长度为 1 的基本通路。

假设 G 中存在长度为 $m-1$ 的基本通路 α $(m\leqslant k)$，则 α 中的顶点总数为 m（基本通路的顶点互不相同）。那么对于 α 两端的其中一个端点 v，α 去除 v 后的顶点总数为 $m-1$。由于 $d(v)\geqslant\delta(G)\geqslant k\geqslant m>m-1$，即 v 的度数大于 α 中去除 v 后的顶点总数，所以与 v 相连的边中必定存在一条边 e 连接了不在 α 中的顶点 v'，于是将边 e 和顶点 v' 加入到 α 中，就构成了长度为 m 的基本通路。

所以 $\forall m\in\mathbb{N},1\leqslant m\leqslant k$，$G$ 有长度为 m 的基本通路。自然地，G 有长度为 k 的基本通路。

□

2. 证明：若无向图 G 没有长度为奇数的基本回路，则 G 没有任何长度为奇数的回路。

证明：

证明原命题的逆否命题“若 G 中存在一条长度为奇数的回路，则 G 中必定存在长度为奇数的基本回路。”

若 G 中存在一条长度为奇数的回路 α，则可以设 $\alpha=v_0e_1v_1e_2\cdots e_kv_k$，$\alpha$ 的长度 k 为奇数。若 α 是基本回路，则 G 中存在长度为奇数的基本回路。

若 α 不是基本回路，则其中存在相同的顶点，不妨设 $v_i=v_j,0\leqslant i<j\leqslant k$，于是 α 的子序列 $v_ie_{i+1}v_{i+1}e_{i+2}\cdots e_jv_j$ 构成一个回路，记为 α'，并且从 α 中删除 α' 后（保留顶点 v_i）仍然是一个回路，记为 α''，并且 α' 和 α'' 的长度之和为原始回路 α 的长度 k。因为 k 为正奇数，所以将其拆分成两个正整数之和后其中必定有一个正整数为奇数，即 α' 和 α'' 中必定有一个长度为奇数。取这个长度为奇数的回路，记为 α_1，则可以对 α_1 重复上述拆分回路的过程，得到长度为奇数的回路 $\alpha_2,\cdots\cdots$。注意到 α 的有限性，上述拆分回路的过程不可能无限进行，最后一次拆分过程结束后，所得到的回路就是长度为奇数的基本回路。

总之，G 中必定存在长度为奇数的基本回路。

□

3. 证明：在任何无向图中，任何奇数度的顶点都有通路到某个其他的奇数度顶点。

证明：

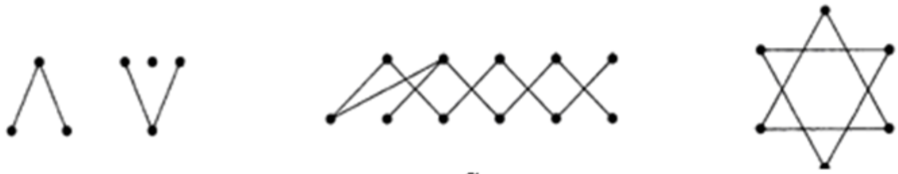
对于任何一个无向图 G，在其中任取一个奇数度的顶点 v，使用反证法。

假设对于所有以 v 为一端的通路，通路的另一端的顶点都是偶数度的，那么将 v 与这些顶点以及与它们相连的边全部取出，即构成 G 的一个连通分量 G'。在 G' 中，只有 v 是奇数度的，其它所有顶点都是偶数度的，那么 G' 的度数之和为奇数，不满足握手定理，因此这种情况不可能发生。

所以 v 必定有通路到某个其他的奇数度顶点。

□

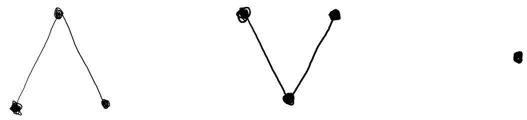
4. 分别求出下列三个无向图的各个连通分量。



G_1 G_2 G_3

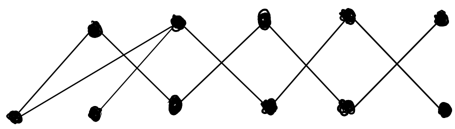
解：

G_1:



G_{1_1} G_{1_2} G_{1_3}

G_2:



G_{2_1}

G_3:

G_{3_1} G_{3_2}

□

7.4 最短通路和 Dijkstra 算法

7.5 图着色

1. 无向图的色数为 1 意味着什么?

图中不存在边。

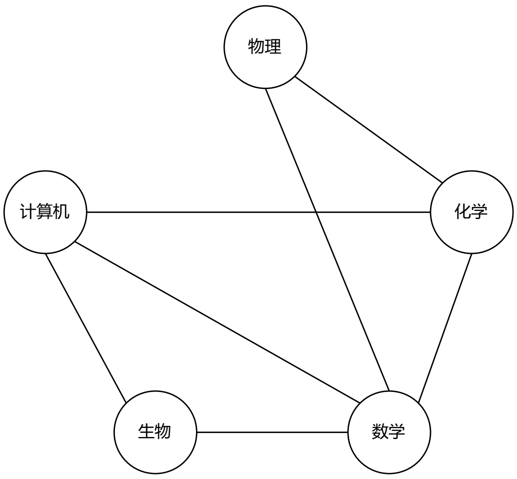
2. 一大学有 5 个专业委员会：物理、化学、数学、生物、计算机，6 位院士：B、C、D、G、S、W。专业委员会由院士组成，物理委员会有院士：C、S 和 W，化学委员会有院士：C、D 和 W；数学委员会有院士：B、C、G 和 S；生物委员会有院士：B 和 G；计算机委员会有院士：D 和 G。每个专业委员会每周开一小时例会，所有成员都不能缺席。如果某院士同时是两个专业委员会的成员，那么这两个专业委员会的例会就不能安排在同一个时间。现要为这些例会安排时间，希望它们的时间尽可能集中。问最少需要几个开会时间？请给出一种安排。

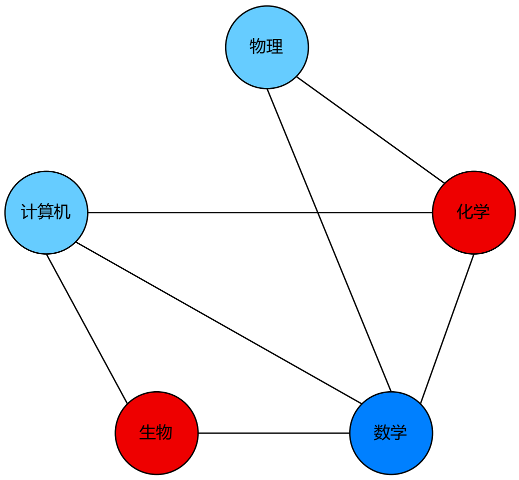
解：

首先将专业委员会和院士的关系整理成如下表格：

专业委员会	院士
物理	C、S、W
化学	C、D、W
数学	B、C、G、S
生物	B、G
计算机	D、G

之后根据“如果某院士同时是两个专业委员会的成员，那么这两个专业委员会的例会就不能安排在同一个时间”构造图，将专业委员会作为顶点，如果这两个专业委员会有相同的院士，那么就在这两个顶点之间连一条边，问题即可转化为图着色问题。于是构造出下方左图：





设此图为 G，由于存在 C_3 的结构，因此 $\chi(G) \geqslant 3$，又因为此图不是完全图也不是奇圈，所以根据 Brooks 定理，$\chi(G) \leqslant \Delta(G) = 4$。

那么尝试找到色数为 3 的着色方案，即上方右图。

因此最少需要 3 个开会时间，即物理和计算机同一时间开会，化学和生物同一时间开会，数学单独时间开会。

□

7.6 图的同构

1. 有 3 个顶点的不同构的简单无向图有多少个?

   3 个。(分别为一条边、两条边、三条边的情况)

2. 证明：若无向图 G 不是连通图，则其补图必为连通图。

证明：

设 G 的补图为 G'，下证 G' 是连通图。

在 G' 中任取两个顶点，若这两个顶点在 G 中不相邻，那么根据补图的定义，它们在 G' 中必定相邻，从而是连通的。

若这两个顶点（设为 v_1, v_2）在 G 中相邻，即它们在 G 中是连通的，而 G 不是连通图，所以必定存在另一个顶点 v_3，使得 v_1 与 v_3 不连通，v_2 与 v_3 不连通，从而 v_1 与 v_3 不相邻，v_2 与 v_3 不相邻。那么根据补图的定义，在 G' 中 v_1 与 v_3 相邻，v_2 与 v_3 相邻，所以 v_1 与 v_2 在 G' 中连通。

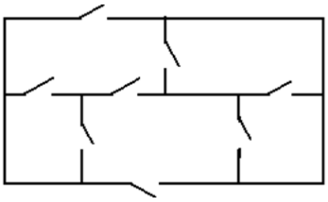
所以在 G' 中任取两个顶点，它们都是连通的，因此 G' 是连通图。

□

第八章　具有特殊性质的图

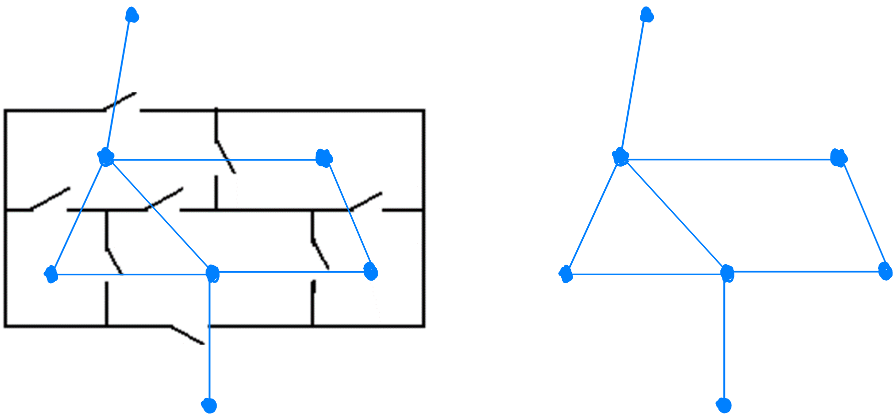
8.1　欧拉图

1. 一房子的平面图如图。问能否从前门进去，最后从后门出去，走过所有的门且每扇门只经过一次？



解：

将每个房间作为一个顶点，如果两个房间之间有门，则在这两个房间之间连一条边，同时将前门外的空间也作为一个顶点，后门外的空间也作为一个顶点，则可以构造出图如下：



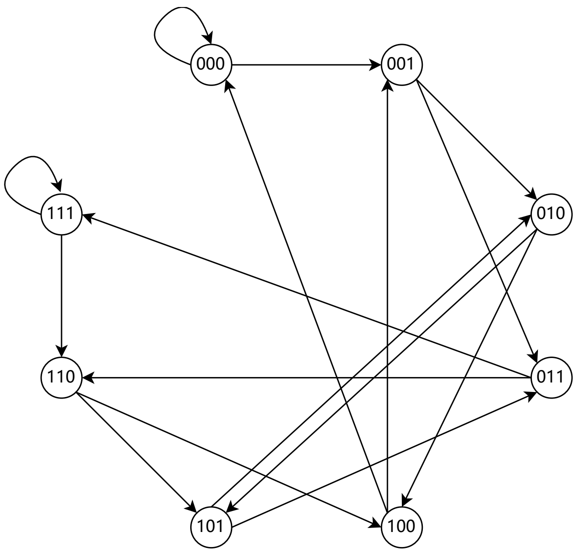
对于该图，只有前门外的顶点和后门外的顶点度数为 1，是奇数，其它顶点的度数都是偶数，因此存在从前门外顶点到后门外顶点的欧拉通路，因为门与图中的边对应，所以能从前门进去，最后从后门出去，走过所有的门且每扇门只经过一次。

□

2. 对于有 16 个扇区和 4 个探测器的磁鼓，给出一种合理的 0-1 赋值。

解：

以所有的 3 位二进制串为顶点，对于两个二进制串，如果前一个二进制串的后 2 位等于后一个二进制串的前 2 位，则从前一个二进制串到后一个二进制串连一条有向边。可以构造出图如下：



值得注意的是，上图也可以看成是数字逻辑电路中 3 位移位寄存器的状态转换图。

在上图中寻找到一条欧拉回路：$110 \to 100 \to 000 \to 000 \to 001 \to 011 \to 111 \to 111 \to 110 \to 101 \to 010 \to 100 \to 001 \to 010 \to 101 \to 011 \to 110$。

依次选取这条欧拉回路所经过的每个节点（终点除外）的最后一位，则可得到一个满足要求的 0-1 赋值为 0000111101001011。

□