3.3 范式和联结词的功能完备集

1. 通过等值演算求 $p \to (p \wedge (q \to p))$ 的主析取范式和主合取范式。

解：

$$\begin{aligned} p \to (p \wedge (q \to p)) &= \neg p \vee (p \wedge (\neg q \vee p)) = \neg p \vee ((p \vee 0) \wedge (p \vee \neg q)) \\ &= \neg p \vee (p \vee (0 \wedge \neg q)) = \neg p \vee p = 1 \\ &= (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \qquad \text{(主析取范式)} \end{aligned}$$

因为原式为永真式，所以无主合取范式。

□

2. 证明 $\{\neg, \to\}$ 是功能完备集。

证明：

$$\begin{aligned} &\neg p = \neg p \\ &p \vee q = \neg p \to q \\ &\because \{\neg, \vee\}\text{是功能完备集} \\ &\therefore \{\neg, \to\}\text{是功能完备集} \end{aligned}$$

□

3.4 命题逻辑的推理理论

1. 证明 $p \to (q \to s), q, p \vee \neg r \Rightarrow r \to s$。

证明：

① r	附加前提引入
② $p \vee \neg r$	前提引入
③ p	①②析取三段论
④ $p \to (q \to s)$	前提引入
⑤ $q \to s$	③④假言推理
⑥ q	前提引入
⑦ s	⑤⑥假言推理

□

2. 构造下列推理的形式证明：“今天下午没有出太阳并且今天比昨天冷。只有今天下午出太阳，我们才去游泳。若我们不去游泳，则我们乘独木舟游览。若我们乘独木舟游览，则我们在黄昏时回家。所以，我们在黄昏时回家。”

证明：

令p : 今天下午出太阳，q : 今天比昨天冷，r : 我们去游泳，

s : 我们乘独木舟游览，t : 我们在黄昏时回家

则需要证明：$\neg p \wedge q, r \to p, \neg r \to s, s \to t \Rightarrow t$

①	$\neg p \wedge q$	前提引入
②	$\neg p$	①化简
③	$r \to p$	前提引入
④	$\neg r$	②③拒取式
⑤	$\neg r \to s$	前提引入
⑥	s	④⑤假言推理
⑦	$s \to t$	前提引入
⑧	t	⑥⑦假言推理

□