第一章　单元作业 1

1. 证明 $P(AB) \geq P(A) + P(B) - 1$。

证明：

$$\begin{aligned}
&\text{设}\Omega\text{表示全集，则}A \in \Omega, B \in \Omega \\
&\therefore A \cup B \in \Omega \\
&\therefore P(A \cup B) \leq P(\Omega) \\
&\therefore P(A) + P(B) - P(AB) \leq 1 \\
&\therefore P(AB) \geq P(A) + P(B) - 1
\end{aligned}$$

□

2. 一副标准扑克牌 52 张一张一张轮流分发给给 4 名游戏者，求每人恰好得到 1 张 A 的概率。

解：

$$\begin{aligned}
&\text{设}A\text{表示事件“每人恰好得到一张}A\text{”，由盒子模型可知：} \\
&P(A) = \frac{\mathrm{P}_4^4}{4^4} = \frac{4!}{256} = \frac{3}{32}
\end{aligned}$$

□

3. 设 $P(A) = 0.7, P(A - B) = 0.3$，求概率 $P(\overline{AB})$。

解：

$$\begin{aligned}
P(\overline{AB}) &= 1 - P(AB) = 1 - P(A - (A - B)) \\
&= 1 - (P(A) - P(A - B)) = 1 - (0.7 - 0.3) = 0.6
\end{aligned}$$

□

4. 设 $P(A) = a, P(B) = b, P(A \cup B) = c$，求概率 $P(\overline{\bar{A} \cup \bar{B}})$。

解：

$$P(\overline{\bar{A} \cup \bar{B}}) = P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = a + b - c$$

□

5. 设 $A, B \in \mathcal{F}$，证明 $P(A) = P(AB) + P(A\bar{B}),\quad P(A \triangle B) = P(A) + P(B) - 2P(AB)$。

证明：

$$\begin{aligned}
&\text{设}\Omega\text{表示全集}\\
P(A) &= P(A\cap\Omega) = P(A\cap(B\cup\bar{B}))\\
&= P(A(B+\bar{B})) = P(AB+A\bar{B}) = P(AB)+P(A\bar{B})\\
P(A\triangle B) &= P((A\backslash B)\cup(B\backslash A)) = P((A-(AB))+(B-(AB)))\\
&= P(A)-P(AB)+P(B)-P(AB) = P(A)+P(B)-2P(AB)
\end{aligned}$$

□

6. 设 $\Omega=(-\infty,\infty), A=\{x\in\Omega:1\le x\le 5\}, B=\{x\in\Omega:3<x<7\}, C=\{x\in\Omega:x<0\}$，求下列事件 $\bar{A}, A\cup B, B\bar{C}, \bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}, (A\cup B)C$。

解：

$$\begin{aligned}
&\bar{A}=\{x\in\Omega:x<1\text{或}x>5\}\\
&A\cup B=\{x\in\Omega:1\le x<7\}\\
&B\bar{C}=\{x\in\Omega:3<x<7\}\\
&\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}=\{x\in\Omega:0\le x<1\text{或}x\ge 7\}\\
&(A\cup B)C=\varnothing
\end{aligned}$$

□

7. 设 I 是任意指标集，$\{A_i, i\in I\}$ 是一事件类，证明 $\overline{\bigcup_{i\in I}A_i}=\bigcap_{i\in I}\overline{A_i}$，$\overline{\bigcap_{i\in I}A_i}=\bigcup_{i\in I}\overline{A_i}$。

证明：

$$\begin{aligned}
&\forall x\in\overline{\bigcup_{i\in I}A_i}\text{，即}x\notin\bigcup_{i\in I}A_i,\text{即}\\
&\forall i\in I, x\notin A_i,\\
&\therefore\forall i\in I, x\in\overline{A_i}\\
&\therefore x\in\bigcap_{i\in I}\overline{A_i}
\end{aligned}$$

$$\therefore\overline{\bigcup_{i\in I}A_i}\subseteq\bigcap_{i\in I}\overline{A_i} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
&\forall x\in\bigcap_{i\in I}\overline{A_i},\text{即}\\
&\forall i\in I, x\in\overline{A_i}\\
&\therefore\forall i\in I, x\notin A_i\\
&\therefore x\notin\bigcup_{i\in I}A_i\\
&\therefore x\in\overline{\bigcup_{i\in I}A_i}
\end{aligned}$$

$$\therefore\bigcap_{i\in I}\overline{A_i}\subseteq\overline{\bigcup_{i\in I}A_i} \tag{2}$$

由(1)(2)可知，$\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}$

由对偶公式可知,$\overline{\overline{\bigcup_{i\in I} A_i}} = \overline{\bigcap_{i\in I} \overline{A_i}}$

$\therefore \overline{\bigcap_{i\in I} \overline{A_i}} = \bigcup_{i\in I} A_i$

$\because \{\overline{A_i}|i\in I\}$也是一事件类

$\therefore$ 将$\overline{A_i}$替换为A_i后可得

$$\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$$

□

8. 从装有 10 双不同尺码或不同样式的皮鞋的箱子中, 任取 4 只, 求恰能成 1 双的概率。

解 :

设A表示事件“恰能成1双”，B表示事件“恰能成2双”，C表示事件“不能成双”，

则由不返回抽样模型可知：

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(B) - P(C) = 1 - \frac{\mathrm{C}_{10}^2}{\mathrm{C}_{20}^4} - \frac{\mathrm{C}_{20}^1\mathrm{C}_{18}^1\mathrm{C}_{16}^1\mathrm{C}_{14}^1}{\mathrm{P}_{20}^4} \\ &= 1 - \frac{\binom{10}{2}}{\binom{20}{4}} - \frac{\binom{20}{1}\binom{18}{1}\binom{16}{1}\binom{14}{1}}{\binom{20}{4}\times 4!} = \frac{96}{323} \approx 0.297213622291022 \end{aligned}$$

□

9. 现从有 15 名男生和 30 名女生的班级中随机挑选 10 名同学参加某项课外活动, 求在被挑选的同学中恰好有 3 名男生的概率。

解 :

设A表示事件“在被挑选的同学中恰好有3名男生”，则

$$P(A) = \frac{\mathrm{C}_{15}^3\mathrm{C}_{30}^7}{\mathrm{C}_{45}^{10}} = \frac{\binom{15}{3}\binom{30}{7}}{\binom{45}{10}} = \frac{3958500}{13633279} \approx 0.290355680390609$$

□

10. 设 $\mathcal{F}$ 是 Ω 上的事件域，$A, B \in \mathcal{F}$，证明 $A\cup B, AB \in \mathcal{F}$。

证明 :

设$A_1 = A, A_2 = B, \forall n > 2, A_n = \varnothing$

$\because \mathcal{F}$是Ω上的事件域,$\forall n \geqslant 1, A_n \in \mathcal{F}$

$\therefore \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A\cup B \in \mathcal{F}$

又 $\because A, B \in \mathcal{F}$

$\therefore \bar{A}, \bar{B} \in \mathcal{F}$

同理，$\bar{A}\cup\bar{B} \in \mathcal{F}$

$\therefore \overline{\bar{A}\cup\bar{B}} = AB \in \mathcal{F}$

□